Correction du devoir surveillé $n°2$

Cours : C.f. cours pour méthode.

1. $F_1 : x \mapsto \tan(x)$
2. $F_2 : x \mapsto \dfrac{1}{25}\mathbf{e}^{3x}(3\cos(4x) + 4\sin(4x))$
3. $F_3 : x \mapsto (x^2 - 2)\sin(x) + 2x\cos(x)$
4. $F_4 : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\mathbf{e}^x)$
5. $F_5 : x \mapsto \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|)$
6. $F_6 : x \mapsto -\dfrac{1}{x+3}$
7. $F_7 : x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{2}\right)$ /7

Exercice 1: Pour tous entiers naturels p et n, on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_0(n) = n+1$, $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. /1
2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^p - k^p] = (n+1)^p$. /1
3. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. $(k+1)^p - k^p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}k^i$. /1
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*$,
$\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}S_i(n) = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}\sum_{k=0}^{n}k^i = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}k^i = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^p - k^p] = (n+1)^p$ /1
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p = 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}S_i(n) = S_0(n) = (n+1)$.
Pour $p = 2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}S_i(n) = S_0(n) + 2S_1(n) = (n+1) + n(n+1) = (n+1)^2$.
Pour $p = 3$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}S_i(n) = S_0(n) + 3S_1(n) + 3S_2(n) = \frac{n+1}{2}(2 + 3n + 2n^2 + n) = (n+1)^3$ /1
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p = 4$, on a $(n+1)^4 = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p}{i}S_i(n) = S_0(n) + 4S_1(n) + 6S_2(n) + 4S_3(n)$.
D'où $S_3 = \dfrac{(n+1)^4 - S_0(n) - 4S_1(n) - 6S_2(n)}{4} = \dfrac{(n+1)^4 - n - 1 - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{4}$.
Donc $S_3 = (n+1)\dfrac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - n(2n+1)}{4} = (n+1)\dfrac{n^3 + n^2}{4} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. /1

Exercice 2: On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
Questions préliminaires :

1. On étudie la fonction $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Cette fonction est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

/2

2. La fonction Arccos étant définie sur $[-1;1]$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. /1

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ donc la fonction f est paire. /1

4.

x	-1		1
$\text{Arccos}(x)$	π	$\searrow$	0

5. La fonction Arccos étant décroissante, on obtient : /2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

Première méthode : par un calcul de dérivée

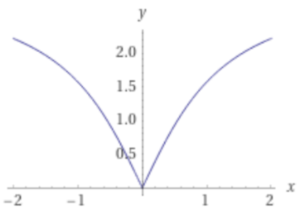
6. Par composition, la fonction f est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, g(x) \notin \{-1;1\}\} = \mathbb{R}^*$. /1

7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$. Or, $(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = (1+x^2)^2\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = (1+x)^2\sqrt{\frac{2\times 2x^2}{(1+x^2)^2}} = 2\sqrt{x^2}$. D'où $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{2}{1+x^2} = \text{signe}(x)\frac{2}{1+x^2}$. /2

8. La fonction f étant une primitive de f' sur $\mathbb{R}_-^*$. et sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit que $f|_{\mathbb{R}_-^*} : x \mapsto -2\text{Arctan}(x) + c_-$ et $f|_{\mathbb{R}_+^*} : x \mapsto 2\text{Arctan}(x) + c_+$.

   Avec les limites en 0, on trouve, $c_- = 0 = c_+$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\text{signe}(x)\text{Arctan}(x)$. /1

9.



/1

Seconde méthode : en utilisant des relations de trigonométrie
Soit $x \in \mathbb{R}$.

10. La fonction $\varphi : \theta \mapsto \tan\frac{\theta}{2}$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi\,;\pi[$. Elle réalise donc une bijection de $]-\pi\,;\pi[$ dans $]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$. Il existe alors un unique réel $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ tel que $\varphi(\theta) = x$ i.e. $x = \tan\frac{\theta}{2}$. /1

11. $\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. /1

12. On a $\text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \text{Arccos}\left(\cos(\theta)\right) = \text{signe}(\theta)\theta$. Or $\text{signe}(x) = \text{signe}(\theta)$ donc $\theta = \text{signe}(x)\text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. /1

13. On a $x = \tan\frac{\theta}{2}$, d'où $\theta = 2\text{Arctan}(x)$. On en déduit que $f(x) = 2\text{signe}(x)\text{Arctan}(x)$. /1

Exercice 3:

1. Puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$, on a $f(0) \geqslant 0$ donc $0 \in E$. De plus, $E \subset [0,1]$ donc E est majoré par 1. On en déduit que E admet une borne supérieure que l'on note b. /2

2. Soit x un réel tel que $x > b$.
   Puisque $b = \sup(E)$ est un majorant de E, on a $x \notin E$ et donc $f(x) < x$. Par croissance de la fonction f sur $[0,1]$, on a $f(x) \geqslant f(b)$. On a donc $x > f(b)$. En faisant tendre x vers b, on obtient $b \geqslant f(b)$.
   Soit x un réel tel que $x < b$. Puisque $b = \sup(E)$ est le plus petit des majorants de E alors x n'est pas un majorant de E donc $\exists t \in]x, b[$ tel que $t \in E : f(t) \geqslant t$. Par croissance de la fonction f sur [0,1], on a $f(b) \geqslant f(t) \geqslant t > x$.
   On a donc $x < f(b)$. En faisant tendre x vers b, on obtient $b \leqslant f(b)$.

   Par double inégalité, $f(b) = b$. /4